

Lõplikud disjunktsioonid ja konjunktsioonid

- Kuna binaarne disjunktsioon ja binaarne konjunktsioon on assotsiatiivsed ja omavad ühikuid falsum ja verum ning on pealegi kommutatiivsed ja idempotentsed, siis alternatiivselt võiksime nende asemel kasutada lõplikke disjunktsioone ja konjunktsioone:

$$\begin{aligned} \bigvee \emptyset &= \perp & \bigwedge \emptyset &= \top \\ \bigvee \{A\} &= A & \bigwedge \{A\} &= A \\ \bigvee (A \cup \Gamma) &= A \vee \bigvee \Gamma & \bigwedge (A \cup \Gamma) &= A \wedge \bigwedge \Gamma \end{aligned}$$

Praktikas kirjutame $\bigvee \{A_1, \dots, A_n\}$ asemel lihtsalt $A_1 \vee \dots \vee A_n$ ning $\bigwedge \{A_1, \dots, A_n\}$ asemel lihtsalt $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, arvestades, et valemite esinemise järjekord ja kordsus nimistus A_1, \dots, A_n ei ole oluline.

Lauseloogika: Normaalkujud

- Lauseloogika keel süntaks on liiane selles mõttes, et üht ja sama tõeväärtusfunktsiooni saab väljendada paljude erinevate valemitega.
- *Literaali* on valem kujul p või $\neg p$, kus p on lausesümbol.
- *Elementaardisjunktsioon* on $l_1 \vee \dots \vee l_n$, kus $\{l_1, \dots, l_n\}$ on lõplik hulk literaale.
- *Elementaarkonjunktsioon* on $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$, kus $\{l_1, \dots, l_n\}$ on lõplik hulk literaale.
- *Konjunkttiivne normaalkuju* on $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$, kus $\{c_1, \dots, c_m\}$ on lõplik hulk elementaardisjunktsioone.
- *Disjunkttiivne normaalkuju* on $c_1 \vee \dots \vee c_m$, kus $\{c_1, \dots, c_m\}$ on lõplik hulk elementaarkonjunktsioone.

- Iga valemi jaoks saab järkjärgulise ümberkirjutamise teel leida temaga loogiliselt ekvivalentse konjunktiivse või disjunktiivse normaalkuju.

Teisendusalgoritm:

- implikatsioonid ära, kasutades $A \supset B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,
- eitused sisse ning kahekordsed eitused ära, kasutades $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$, $\neg\neg A \Leftrightarrow A$,
- disjunktsioonid või konjunktsioonid sisse, kasutades $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ja $A \vee \top \Leftrightarrow \top$ või $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ja $A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$,
- kordused ning vastandpaarid elementaardisjunktsioonides ja -konjunktsioonides ära, kasutades idempotentsiseadusi $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$, välistatud kolmanda seadust $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$ ja vastuolu seadust $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$,
- triviaalsed elementaardisjunktsioonid ja -konjunktsioonid ära, kasutades ühikute seadusi $A \wedge \top \Leftrightarrow A$, $A \vee \perp \Leftrightarrow A$
- Saadud kuju võib veel optimeerida kasutades absorptsioone $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ ja $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$.