

## Ülesanded 22. septembriks 2008 (kell 12)

### Ülesanne 1.

Olgu antud hulk  $A = \{1, 2, 3\}$ , ning kõigi selliste relatsioonide hulk  $\mathcal{G}$ , mille korral iga element  $a \in A$  on täpselt ühe relatsiooni kuuluva paari vasak element ja täpselt ühe paari parem element. Sama formaalselt:

$$\mathcal{G} = \{G \mid G \subseteq A \times A, \forall a[a \in A \Rightarrow (\exists! p_1 = (a, y) \in G) \wedge (\exists! p_2 = (x, a) \in G)]\}$$

Mitu elementi on hulgas  $\mathcal{G}$ ? Koostage hulga  $\mathcal{G}$  jaoks relatsioonide korrutamise tabel, s.t. leidke iga kahe relatsiooni  $G_1 \in \mathcal{G}$  ja  $G_2 \in \mathcal{G}$  jaoks  $G_1 \cdot G_2$ .

Leidke hulga  $\mathcal{G}$  iga elemendi jaoks transitiivne sulund. Millised neist on ekvivalentsiseosed? Tooge esile ekvivalentsiklassid.

### Ülesanne 2.

Olgu antud tähtede hulk (tähestik)  $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ . Sõne (string) on hulga  $A$  tähtedest moodustatud lõplik järjend (list). Kõigi sõnede hulka tähistame  $A^*$  ning tühja sõne sümboliga  $\varepsilon$ . Seega  $A^* = \{\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{aa}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}, \mathbf{bb}, \mathbf{aaa}, \mathbf{aab}, \dots\}$ . Olgu funktsiooni  $F(n)$  väärtuseks kõigi selliste  $n$ -täheliste sõnede arv, milles esineb kaks korda enam tähte  $\mathbf{a}$  kui tähte  $\mathbf{b}$  ning funktsiooni  $\tilde{F}(n)$  väärtuseks selliste  $n$ -täheliste sõnede arv, milles esineb vähemalt kaks korda enam  $\mathbf{a}$ -d kui  $\mathbf{b}$ -sid. Millise valemiga saaks arvutada funktsioonide  $F(n)$  ja  $\tilde{F}(n)$  väärtusi? Korraldage sama funktsioonide  $S(n)$  ja  $\tilde{S}(n)$  korral, kus  $S(n)$  on selliste  $n$ -täheliste sõnede arv, milles on täpselt kaks  $\mathbf{a}$ -d rohkem kui  $\mathbf{b}$ -sid ning  $\tilde{S}(n)$  on sõnede arv, milles on vähemalt kaks  $\mathbf{a}$ -d rohkem kui  $\mathbf{b}$ -sid. Millisel juhul  $F(n) = S(n)$ ?

### Ülesanne 3.

Olgu antud relatsioon  $R$  hulgal  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , nii et  $xRy$  kehtib parajasti iga punkti  $(x, y)$  korral, mis asub lõigul otspunktidega  $A(1, 1)$  ja  $B(7, 4)$ . Leida sulundid  $R^*$  ja  $R^+$  (esitage need relatsioonid nii valemite abil kui graafiliselt).